

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Смоленский государственный университет»

**Программа вступительного испытания  
по алгебре и началам анализа**

Смоленск

# I. СОДЕРЖАНИЕ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

## Основные математические понятия и факты

*Арифметика, алгебра и начала анализа*

1. Натуральные числа ( $N$ ). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
3. Целые числа ( $Z$ ). Рациональные числа ( $Q$ ), их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.
4. Действительные числа ( $R$ ), их представление в виде десятичных дробей.
5. Изображение действительных чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.
6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.
7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.
8. Логарифмы, их свойства.
9. Одночлен и многочлен.
10. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена (на примере квадратного трехчлена).
11. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции.
12. График функции. Возрастание и убывание функции, периодичность, четность, нечетность.
13. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.
14. Определение и основные свойства функций: линейной, квадратичной, степенной, обратной, показательной, логарифмической, тригонометрических, арифметического корня.
15. Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.
16. Неравенства. Решение неравенства. Понятие о равносильных неравенствах.
17. Система уравнений и неравенств. Решение системы.
18. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула  $n$ -го члена и суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии. Формула  $n$ -го члена и суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии.
19. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).
20. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.
21. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования.
22. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл.
23. Первообразные элементарных функций. Определенный интеграл.
24. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница.
25. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения с помощью интеграла.

## *Элементы геометрии*

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.
2. Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.
3. Векторы. Операции над векторами.
4. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.
5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.
6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.
7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.
8. Центральные и вписанные углы.
9. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.
10. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.
11. Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.
12. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.
13. Параллельность прямой и плоскости.
14. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.
15. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.
16. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.
17. Тела вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.
18. Формулы площади поверхности и объема призмы.
19. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.
20. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.
21. Формулы площади поверхности и объема конуса.
22. Формула объема шара.
23. Формула площади сферы.

## **Основные формулы и теоремы**

### *Алгебра и начала анализа*

1. Свойства функции  $y = ax + b$  и ее график.
2. Свойства функции  $y = k/x$  и ее график.
3. Свойства функции  $y = ax^2 + bx + c$  и ее график.
4. Формула корней квадратного уравнения.
5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
6. Свойства числовых неравенств.
7. Логарифм произведения, степени, частного.
8. Определение и свойства функций  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  и их графики.

9. Определение и свойства функций  $y = \operatorname{tg} x$  и ее график.
10. Решение уравнений вида  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ .
11. Формулы приведения.
12. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
13. Тригонометрические функции двойного аргумента.
14. Производная суммы двух функций.

### *Геометрия*

1. Свойства равнобедренного треугольника.
2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.
3. Признаки параллельности прямых.
4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.
5. Признаки параллелограмма.
6. Окружность, описанная около треугольника.
7. Окружность, вписанная в треугольник.
8. Касательная к окружности и ее свойства.
9. Измерение угла, вписанного в окружность.
10. Признаки подобия треугольников.
11. Теорема Пифагора.
12. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.
13. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.
14. Признак параллельности прямой и плоскости.
15. Признак параллельности плоскостей.
16. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.
17. Теорема о трех перпендикулярах.
18. Перпендикулярность двух плоскостей.
19. Теоремы о параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

### **Основные умения и навыки**

Экзаменуемый должен уметь:

1. Производить арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений; пользоваться калькуляторами или таблицами для производства вычислений.
2. Проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.
3. Строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций.
4. Решать уравнения и неравенства первой и второй степени, уравнения и неравенства, приводящиеся к ним; решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним. Сюда, в частности, относятся простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные,

логарифмические и тригонометрические функции.

5. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений.

6. Производить простейшие построения на плоскости и изображать геометрические фигуры на чертеже.

7. Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач.

8. Проводить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и пользоваться свойствами этих операций.

9. Пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремумы и при построении графиков функций.

## **II. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

Учебники по математике, рекомендованные (допущенные) Министерством просвещения РФ к использованию в образовательном процессе в образовательных учреждениях, реализующих образовательные программы общего образования и имеющих государственную аккредитацию.

## **III. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РАБОТЫ**

Письменная работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

ЧАСТЬ 1 работы включает 5 закрытых заданий, которые оцениваются оценивается в 5 баллов без градации (правильный ответ – 5 баллов, отсутствие ответа или неверный ответ – 0 баллов).

ЧАСТЬ 2 содержит 10 задач, которые необходимо решить и записать ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Ответы на вопросы второй части также оцениваются в 5 баллов без градации.

ЧАСТЬ 3 содержит 5 заданий, в которых необходимо показать полное обоснованное решение и ответ. Каждое решение оценивается в 5 баллов со следующей градацией: правильный ответ с полным объяснением – 5 баллов; ответ с незначительной неточностью или недостаточно полный – 4 балла; ответ неполный или содержащий принципиальную ошибку – 2-3 балла; неверный ответ, содержащий здравую идею или демонстрирующий понимание сути задания – 1 балл; отсутствие ответа или принципиально неверный ответ – 0 баллов.

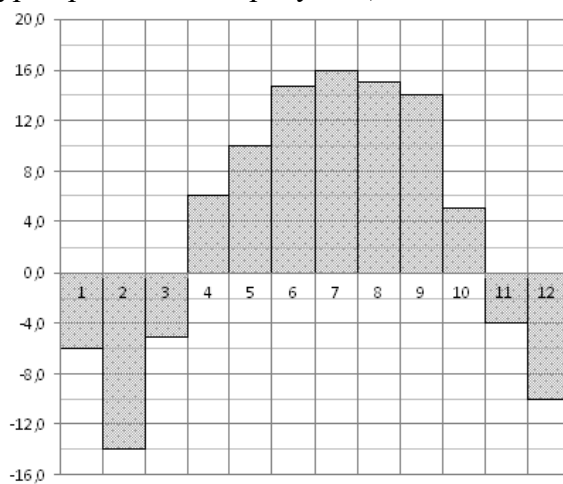
#### IV. ОБРАЗЕЦ ПИСЬМЕННОЙ РАБОТЫ

В задачах №№1-5 выберите вариант ответа, в задачах №№6-15 запишите ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое правильно решенное задание оценивается в пять баллов..

1. Поезд Новосибирск-Красноярск отправляется в 15:20, а прибывает в 4:20 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути? Выберите вариант ответа.

А. 13    Б. 23    В. 14    Г. 12

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 4 градуса Цельсия.



Выберите вариант ответа.

А. 12    Б. 5    В. 7    Г. 6

3. Магазин закупает на заводе мороженое по 30 рублей за штуку и продаёт с наценкой в 20%. Сколько мороженого можно купить в этом магазине на 200 рублей?

Выберите вариант ответа.

А. 5    Б. 10    В. 4    Г. 7

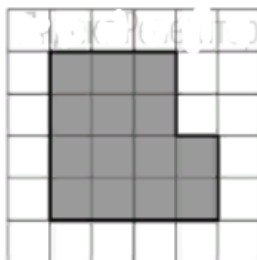
4. Решите уравнение

$$\log_5(5 - x) = 2.$$

Выберите вариант ответа.

А. -20    Б. -15    В. 17    Г. 16

5. План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1м×1м.



Найдите площадь участка, выделенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.

Выберите вариант ответа.

А. 14    Б. 12    В. 20    Г. 25

6. Строительной фирме нужно приобрести 75 кубометров пенобетона у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за за 1 м <sup>3</sup> )	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2650	4500 руб.	
Б	2700	5500 руб.	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2680	3500 руб.	При заказе более 80 м <sup>3</sup> доставка бесплатно

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

7. Найдите  $20\cos 2\alpha$ , если  $\sin\alpha = 0,5$ .

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

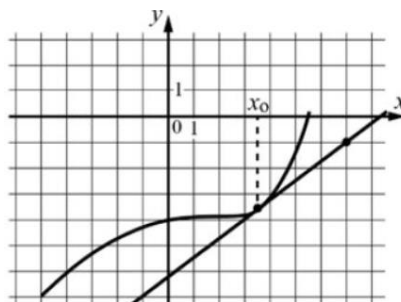
8. В школе есть четырехместные туристические палатки. Какое наименьшее число палаток нужно взять в поход, в котором участвует 13 человек?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

9. Найдите значение выражения

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

10. На рисунке изображены график функции  $y=f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

11. Квартира состоит из комнаты, кухни, коридора и санузла (см. чертёж). Комната имеет размеры 5 м x 3.5 м, коридор — 1.5 м x 6.5 м, длина кухни 3.5 м. Найдите площадь санузла (в квадратных метрах).

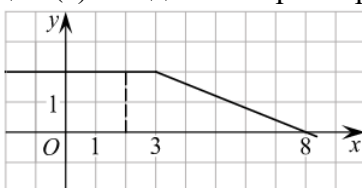


--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

12. В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета, остальные – жёлтого цвета. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

13. На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$ . Пользуясь рисунком, вычислите разность  $F(8) - F(2)$ , где  $F(x)$  — одна из первообразных функции  $f(x)$ .



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

14. Найдите наименьшее значение функции  $y = x^3 - 3x + 23$  на отрезке  $[0; 2]$ .

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

15. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой  $t_F = 1,8 \cdot t_C + 32$  где  $t_C$  — температура в градусах Цельсия,  $t_F$  — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует 100 градусов по шкале Цельсия?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

В задачах №16-20 запишите полное обоснованное решение и ответ на дополнительных листах. Каждое правильно решенное задание оценивается в пять баллов.

16. Решите уравнение

$$4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20$$

и укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; 2]$ .

*Приведите полное обоснованное решение и ответ.*

17. По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

*Приведите полное обоснованное решение и ответ.*

18. Решите неравенство

$$25x^2 - 4|8 - 5x| < 80x - 64.$$

*Приведите полное обоснованное решение и ответ.*

19. Даны  $n$  различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ( $n$  больше или равно 3).



- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?  
б) Каково наибольшее значение  $n$ , если сумма всех данных чисел меньше 900?  
в) Найдите все возможные значения  $n$ , если сумма всех данных чисел равна 123..  
*Приведите полное обоснованное решение и ответ.*

20. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 4x^2 + 9a^2} = x^2 + 2x - 3a$$

имеет ровно 3 корня.

*Приведите полное обоснованное решение и ответ.*