

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Смоленский государственный университет»

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА  
ПО МАТЕМАТИКЕ**

Смоленск  
2020

# СОДЕРЖАНИЕ ОСНОВНЫХ РАЗДЕЛОВ

## Основные математические понятия и факты

### *Арифметика, алгебра и начала анализа*

1. Натуральные числа ( $\mathbb{N}$ ). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
3. Целые числа ( $\mathbb{Z}$ ). Рациональные числа ( $\mathbb{Q}$ ), их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.
4. Действительные числа ( $\mathbb{R}$ ), их представление в виде десятичных дробей.
5. Изображение действительных чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.
6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.
7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.
8. Логарифмы, их свойства.
9. Одночлен и многочлен.
10. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена (на примере квадратного трехчлена).
11. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции.
12. График функции. Возрастание и убывание функции, периодичность, четность, нечетность.
13. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.
14. Определение и основные свойства функций: линейной, квадратичной  $y=ax^2 + bx + c$ , степенной  $y=ax^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $y=k/x$ , показательной  $y=a^x$ ,  $a>0$ , логарифмической, тригонометрических функций ( $y=\sin x$ ;  $y=\cos x$ ;  $y=\operatorname{tg} x$ ), арифметического корня  $y=\sqrt[n]{x}$ .
15. Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.
16. Неравенства. Решение неравенства. Понятие о равносильных неравенствах.
17. Система уравнений и неравенств. Решение системы.
18. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула  $n$ -го члена и суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии. Формула  $n$ -го члена и суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии.
19. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).
20. Преобразование в произведение сумм  $\sin\alpha \pm \sin\beta$  и  $\cos\alpha \pm \cos\beta$ .
21. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.
22. Производные функций  $y=\sin x$ ;  $y=\cos x$ ;  $y=\operatorname{tg} x$ ;  $y=x^n$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ),  $y=a^x$ .

### *Геометрия*

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

2. Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.
3. Векторы. Операции над векторами.
4. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.
5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.
6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.
7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.
8. Центральные и вписанные углы.
9. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.
10. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.
11. Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.
12. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.
13. Параллельность прямой и плоскости.
14. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.
15. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.
16. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.
17. Тела вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.
18. Формулы площади поверхности и объема призмы.
19. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.
20. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.
21. Формулы площади поверхности и объема конуса.
22. Формула объема шара.
23. Формула площади сферы.

### **Основные формулы и теоремы**

#### *Алгебра и начала анализа*

1. Свойства функции  $y = ax + b$  и ее график.
2. Свойства функции  $y = k/x$  и ее график.
3. Свойства функции  $y = ax^2 + bx + c$  и ее график.
4. Формула корней квадратного уравнения.
5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
6. Свойства числовых неравенств.
7. Логарифм произведения, степени, частного.
8. Определение и свойства функций  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  и их графики.
9. Определение и свойства функций  $y = \operatorname{tg} x$  и ее график.
10. Решение уравнений вида  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ .
11. Формулы приведения.
12. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

13. Тригонометрические функции двойного аргумента.

14. Производная суммы двух функций.

### *Геометрия*

1. Свойства равнобедренного треугольника.

2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.

3. Признаки параллельности прямых.

4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

5. Признаки параллелограмма.

6. Окружность, описанная около треугольника.

7. Окружность, вписанная в треугольник.

8. Касательная к окружности и ее свойства.

9. Измерение угла, вписанного в окружность.

10. Признаки подобия треугольников. 11. Теорема Пифагора.

12. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.

13. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.

14. Признак параллельности прямой и плоскости.

15. Признак параллельности плоскостей.

16. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

17. Теорема о трех перпендикулярах.

18. Перпендикулярность двух плоскостей.

19. Теоремы о параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

### **Основные умения и навыки**

Экзаменуемый должен уметь:

1. Производить арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений; пользоваться калькуляторами или таблицами для производства вычислений.

2. Проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

3. Строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций.

4. Решать уравнения и неравенства первой и второй степени, уравнения и неравенства, приводящиеся к ним; решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним. Сюда, в частности, относятся простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

5. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений.

6. Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости.

7. Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии – при решении геометрических задач.

8. Проводить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и пользоваться свойствами этих операций.

9. Пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремумы и при построении графиков функций

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

Учебники по математике, рекомендованные (допущенные) Министерством просвещения РФ к использованию в образовательном процессе в образовательных учреждениях, реализующих образовательные программы общего образования и имеющих государственную аккредитацию.

## **КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ**

### **Форма проведения вступительного испытания**

Экзамен проводится в письменной форме с применением дистанционных технологий.

### **Продолжительность вступительного испытания**

На подготовку ответов на экзаменационные вопросы отводится четыре астрономических часа (240 минут).

### **Структура вступительного испытания**

Письменная работа состоит из трех частей и содержит 20 заданий.

Первая часть содержит 5 заданий с выбором варианта ответа.

Вторая часть содержит 10 заданий, ответ на которые необходимо записать в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Третья часть содержит 5 заданий, в которых необходимо показать полное обоснованное решение и ответ.

### **Шкала оценивания**

**Ответы на вопросы первой части** оцениваются дихотомически: за правильный ответ начисляется 5 баллов, за неправильный – 0 баллов. Закрытые вопросы не предполагают двусмысленности – необходимо выбрать один ответ, который является общепринятым с точки зрения математики.

*Максимально возможное количество баллов за первую часть* испытания – 25.

**Ответы на вопросы второй части** также оцениваются дихотомически: за правильный ответ начисляется 5 баллов, за неправильный – 0 баллов.

*Максимально возможное количество баллов за вторую часть* испытания – 50.

**Ответы на вопросы третьей части** оцениваются по пятибалльной шкале:

- правильный ответ с полным объяснением – 5 баллов;
- ответ с незначительной неточностью или недостаточно полный – 4 балла;

- ответ неполный или содержащий принципиальную ошибку – 2-3 балла;
- неверный ответ, содержащий здравую идею или демонстрирующий понимание сути задания – 1 балл;
- отсутствие ответа или принципиально неверный ответ – 0 баллов.

*Максимально возможное количество баллов за третью часть испытания – 25.*

*Максимальная возможная оценка за три части вступительного испытания – 100 баллов.*

## ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

**ЧАСТЬ 1** теста включает **5** закрытых вопросов, которые оцениваются дихотомически: за правильный ответ начисляется **5** баллов, за неправильный – **0** баллов. Закрытые вопросы не предполагают двусмысленности – необходимо дать четкий однозначный ответ.

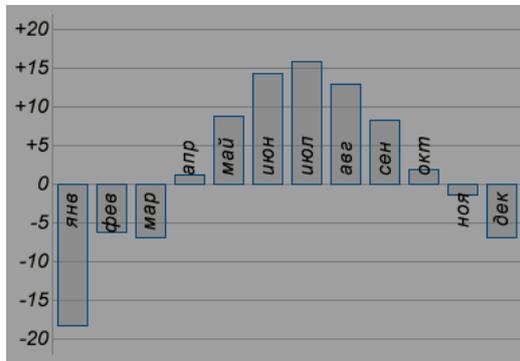
Максимально возможное количество баллов за первую часть испытания – **25**.

1. Таксист за месяц проехал 8000 км. Цена бензина 42 рубля за литр. Средний расход бензина на 100 км составляет 10 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

*Выберите вариант ответа.*

А. 800      Б. 33600      В. 336000      Г. 8000

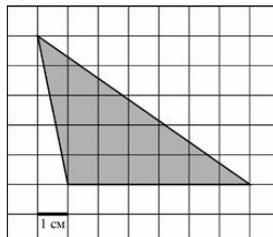
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха (в градусах Цельсия) в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1988 года. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура была выше нуля.



*Выберите вариант ответа.*

А. 12      Б. 5      В. 7      Г. 6

3. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник. Найдите его площадь.



*Выберите вариант ответа.*

А. 12      Б. 15      В. 9      Г. 21

4. Решите уравнение  $\log_{\frac{1}{5}}(5x + 1) = -4$ .

*Выберите вариант ответа.*

А. 12 Б. 15 В. 17 Г. 16

5. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен  $30^\circ$ . Боковая сторона треугольника равна 26. Найдите площадь этого треугольника.

Выберите вариант ответа.

А. 169Б. 338 В. 84,5 Г. 676

**ЧАСТЬ 2** содержит 10 задач, которые необходимо решить и записать ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. За правильный ответ начисляется 5 баллов, за неправильный – 0 баллов.

Максимально возможное количество баллов за вторую часть испытания – 50.

6. Строительный подрядчик планирует купить 15 тонн облицовочного кирпича у одного из трёх поставщиков. Один кирпич весит 5 кг. Цена кирпича и условия доставки всей покупки приведены в таблице. Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

Поставщик	Цена кирпича(руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные условия
А	17	7000	Нет
Б	18	6000	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 50000 руб.
В	19	5000	Доставка со скидкой 50% если сумма заказа превышает 60000 руб.

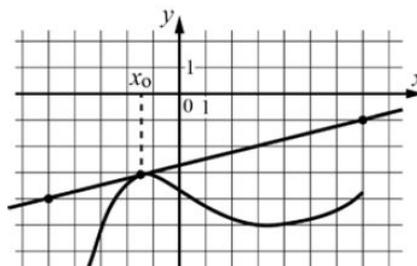
7. Найдите  $25\cos 2\alpha$ , если  $\sin\alpha = -0,7$ .

8. 47 туристов хотят забронировать трехместные номера в отеле. Сколько номеров им нужно забронировать?

9. Найдите значение выражения

$$\frac{2^3 - 2^{-2}}{2^{-1}}$$

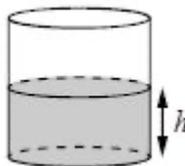
10. На рисунке изображены график функции  $y=f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



11. Пол комнаты имеет форму квадрата со стороной 8 м. Его необходимо покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 5 см и 20 см. Сколько потребуется таких дощечек?

12. В корзине лежат 15 мячиков: 5 синих, 7 зеленых, остальные — красные. С какой вероятностью случайно вытащенный мячик окажется красным?

13. Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне  $h=80$  см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания в четыре раза больше, чем у данного? Ответ дайте в сантиметрах.



14. Найдите наибольшее значение функции  $y = x^3 - 12x + 7$  на отрезке  $[-3; 0]$ .

15. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по  $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$ , где  $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

**ЧАСТЬ 3 содержит 5 задач, в которых необходимо показать полное обоснованное решение и ответ. Каждый ответ оценивается по пятибалльной шкале. Правильный, однозначный и полный ответ на открытый вопрос оценивается в 5 баллов. Если допущена неточность или дан неполный ответ, оценка снижается на 1, 2, 3 или 4 балла, за однозначно неправильный ответ ставится 0 баллов.**

**Максимально возможное количество баллов за вторую часть испытания – 25.**

16. Решите уравнение  $8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0$  и укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\log_5 2, \log_5 20]$ .

17. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная этому ребру. Известно, что она пересекает остальные боковые рёбра и разбивает пирамиду на два многогранника, объёмы которых относятся как 1 к 3. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если боковое ребро пирамиды равно 2

18. Решите неравенство

$$|x - 1| - \frac{6}{|x-1|} \leq 1.$$

19. Две окружности касаются внешним образом в точке  $C$ . Прямая касается меньшей окружности в точке  $A$ , а большей — в точке  $B$ , отличной от  $A$ . Прямая  $AC$  вторично пересекает большую окружность в точке  $D$ , прямая  $BC$  вторично пересекает меньшую окружность в точке  $E$ . Пусть  $L$  — отличная от  $D$  точка пересечения отрезка  $DE$  с большей окружностью. Найдите  $EL$ , если радиусы окружностей равны 1 и 3.

20. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^3+2x^2-ax+4=0$  имеет единственный корень на отрезке  $[-1;2]$ .